2.1 **Zustandsänderungen**

$A \rightarrow B$ isotherme Expansion

$B \rightarrow C$ isochore Abkühlung

$C \rightarrow D$ isotherme Kompression

$D \rightarrow A$ isochore Erwärmung

Zu Beginn erstellt man eine Tabelle, die alle gegebenen Größen enthält. Die Werte für das Volumen und die Temperatur werden dem V-T-Diagramm entnommen. Der maximale Druck herrscht im Zustand A.

	p in 10^5 Pa	V in m^3	T in K
A	1,8	0,025	450
B		0,060	450
C		0,060	300
D		0,025	300

Begründung:

- Bei $A \rightarrow B$ muss der Druck wegen $p \cdot V = \text{konst}$ abnehmen.
- In der Zustandsänderung $B \rightarrow C$ nimmt der Druck wegen $\frac{p}{T} = \text{konst.}$ ebenfalls ab.
- Wegen $\frac{p \cdot V}{T} = \text{konst.}$ gilt für die Zustände A und D

  $$\frac{p_A \cdot V_A}{T_A} = \frac{p_D \cdot V_D}{T_D},$$

  wobei

  $$\frac{V_A}{T_A} = 5{,}556 \cdot 10^{-5}\,\frac{m^3}{K} \quad \text{und} \quad \frac{V_D}{T_D} = 8{,}333 \cdot 10^{-5}\,\frac{m^3}{K}$$

  ist. Man erkennt, dass p_A größer als p_D sein muss.

Insgesamt folgt: p_A ist der maximale Druck p_{max}.

Die restlichen Größen müssen berechnet werden.

- Ermittlung von p_B:

  $$p_A \cdot V_A = p_B \cdot V_B \quad \Rightarrow \quad p_B = p_A \cdot \frac{V_A}{V_B}$$

  $$= 1{,}8 \cdot 10^5\,\text{Pa} \cdot \frac{0{,}025\,m^3}{0{,}06\,m^3} = \underline{\underline{7{,}5 \cdot 10^4\,\text{Pa}}}$$

- Ermittlung von p_C:

  $$\frac{p_B}{T_B} = \frac{p_C}{T_C} \quad \Rightarrow \quad p_C = \frac{p_B}{T_B} \cdot T_C$$

  $$= \frac{7{,}5 \cdot 10^4\,\text{Pa}}{450\,K} \cdot 300\,K = \underline{\underline{5{,}0 \cdot 10^4\,\text{Pa}}}$$

- Ermittlung von p_D:

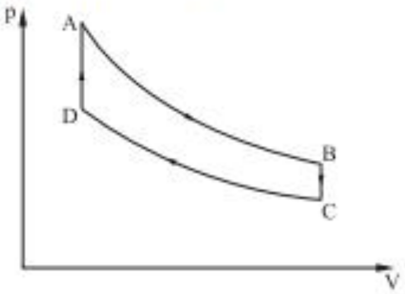
  $$p_C \cdot V_C = p_D \cdot V_D \quad \Rightarrow \quad p_D = p_C \cdot \frac{V_C}{V_D}$$

  $$= 5{,}0 \cdot 10^4\,\text{Pa} \cdot \frac{0{,}060\,m^3}{0{,}025\,m^3} = \underline{\underline{1{,}2 \cdot 10^5\,\text{Pa}}}$$

Die Tabelle wird nun mit den berechneten Werten ergänzt:

	p in 10^5 Pa	V in m^3	T in K
A	1,8	0,025	450
B	0,75	0,060	450
C	0,50	0,060	300
D	1,2	0,025	300

2.2 **p-V-Diagramm**



2.3 In der Aufgabenstellung soll für **eine** Zustandsänderung die Volumenarbeit W, die Änderung der inneren Energie ΔU und die Wärme Q berechnet werden. Nachfolgend wird die Berechnung für alle vier Zustandsänderungen gezeigt.

Für die Berechnungen ist die Kenntnis der Masse des Gases m_G notwendig:

$$p_A \cdot V_A = m_G \cdot R_S \cdot T_A \;\Rightarrow\; m_G = \frac{p_A \cdot V_A}{R_S \cdot T_A}$$

$$= \frac{1{,}8 \cdot 10^5\,\text{Pa} \cdot 0{,}025\,\text{m}^3}{290\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \cdot 450\,\text{K}} = 34{,}483\,\text{g} = 0{,}034\,\text{kg}$$

Zustandsänderung A → B

- Mechanische Arbeit:

$$W_{AB} = -m_G \cdot R_S \cdot T_A \cdot \ln\frac{V_B}{V_A}$$

$$= -0{,}034483\,\text{kg} \cdot 290\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \cdot 450\,\text{K} \cdot \ln\frac{0{,}060\,\text{m}^3}{0{,}025\,\text{m}^3} = \underline{\underline{-3{,}94 \cdot 10^3\,\text{J}}}$$

- Übertragene Wärme:

$$Q_{AB} = -W_{AB}$$

$$= \underline{\underline{3{,}94 \cdot 10^3\,\text{J}}}$$

- Änderung der inneren Energie:

$$\Delta U_{AB} = c_V \cdot m_G \cdot (T_B - T_A)$$

Wegen $T_B = T_A$ (isotherme Zustandsänderung) folgt

$$\Delta U_{AB} = \underline{\underline{0\,\text{J}}}.$$

Zustandsänderung B → C

- Mechanische Arbeit:

  Wegen $V_C = V_B$ (isochore Zustandsänderung) folgt

  $$W_{BC} = \underline{\underline{0\ \mathrm{J}}}.$$

- Übertragene Wärme:

  $$Q_{BC} = c_V \cdot m_G \cdot (T_C - T_B)$$

  $$= 720\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}} \cdot 0{,}034483\ \mathrm{kg} \cdot (300\ \mathrm{K} - 450\ \mathrm{K}) = \underline{\underline{-3{,}72 \cdot 10^3\ \mathrm{J}}}$$

- Änderung der inneren Energie:

  Nach dem 1. Hauptsatz gilt wegen $W_{BC} = 0\ \mathrm{J}$

  $$\Delta U_{BC} = Q_{BC}$$

  $$= \underline{\underline{-3{,}72 \cdot 10^3\ \mathrm{J}}}.$$

Zustandsänderung C → D

- Mechanische Arbeit:

  $$W_{CD} = -m_G \cdot R_S \cdot T_C \cdot \ln\frac{V_D}{V_C}$$

  $$= -0{,}034483\ \mathrm{kg} \cdot 290\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}} \cdot 300\ \mathrm{K} \cdot \ln\frac{0{,}025\ \mathrm{m}^3}{0{,}060\ \mathrm{m}^3} = \underline{\underline{2{,}63 \cdot 10^3\ \mathrm{J}}}$$

- Übertragene Wärme:

  $$Q_{CD} = -W_{CD}$$

  $$= \underline{\underline{-2{,}63 \cdot 10^3\ \mathrm{J}}}$$

- Änderung der inneren Energie:

  $$\Delta U_{CD} = c_V \cdot m_G \cdot (T_D - T_C)$$

  Wegen $T_C = T_D$ (isotherme Zustandsänderung) folgt

  $$\Delta U_{CD} = \underline{\underline{0\ \mathrm{J}}}.$$

Zustandsänderung D → A

- Mechanische Arbeit:

  Wegen $V_A = V_D$ (isochore Zustandsänderung) folgt

  $$W_{DA} = \underline{\underline{0\ \mathrm{J}}}.$$

- Übertragene Wärme:

  $$Q_{DA} = c_V \cdot m_G \cdot (T_A - T_D)$$

  $$= 720\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}} \cdot 0{,}034483\ \mathrm{kg} \cdot (450\ \mathrm{K} - 300\ \mathrm{K}) = \underline{\underline{3{,}72 \cdot 10^3\ \mathrm{J}}}$$

- Änderung der inneren Energie:
  Nach dem 1. Hauptsatz gilt wegen $W_{DA} = 0\,J$

$$\Delta U_{DA} = Q_{DA}$$
$$= \underline{\underline{3{,}72 \cdot 10^3\,J}}.$$

Alle Werte werden zur besseren Übersicht noch einmal in einer Tabelle dargestellt.

	W in kJ	Q in kJ	ΔU in kJ
$A \to B$	–3,94	3,94	0
$B \to C$	0	–3,72	–3,72
$C \to D$	2,63	–2,63	0
$D \to A$	0	3,72	3,72

2.4 **Möglichkeit 1: Formelsammlung**

Für den Stirling'schen Kreisprozess gilt die Gleichung

$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_B}.$$

Einsetzen liefert das Ergebnis:

$$\eta = 1 - \frac{300\,K}{450\,K} = \underline{\underline{0{,}33}}$$

Möglichkeit 2: Allgemeiner Zusammenhang

Für den Wirkungsgrad eines jeden thermischen Kreisprozesses gilt

$$\eta = -\frac{\sum_{i=1}^{n} W_i}{\sum_{j=1}^{m} Q_{zu,\,j}}.$$

Beim Stirlingprozess wird bei den Prozessen $A \to B$ und $C \to D$ Arbeit verrichtet bzw. zugeführt. Es wird nur die zugeführte Wärme beim Prozess $A \to B$ betrachtet. Die Wärmen bei $B \to C$ und $D \to A$ werden durch den Wärmetauscher ausgetauscht und verbleiben im System. Q_{DA} findet somit keine Beachtung bei den zugeführten Wärmen. Dann folgt:

$$\eta = -\frac{W_{AB} + W_{CD}}{Q_{AB}}$$
$$= -\frac{-3{,}94\,kJ + 2{,}63\,kJ}{3{,}94\,kJ} = \underline{\underline{0{,}33}}$$